

## Ответы: ЕГЭ по математике (профиль)

**1** 169

**2** -4

**3** 104

**4** 0.17

**5** 5

**6** 0,6

**7** 48

**8** 6

**9** 12

**10** 54

**11** -50

**12** 6

**13**

**Решение.**

а) Преобразуем уравнение:

$$\cos x + \cos \frac{x}{2} = 0; \quad 2 \cos^2 \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2} - 1 = 0.$$

Значит,  $\cos \frac{x}{2} = -1$  или  $\cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2}$ , следовательно,  $x = 2\pi + 4\pi n$  или

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi k, \text{ где } n, k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку  $[4\pi; 7\pi]$ :

$$4\pi \leq 2\pi + 4\pi n \leq 7\pi; \quad \frac{1}{2} \leq n \leq \frac{5}{4}; \quad n = 1; \quad x = 6\pi;$$

$$4\pi \leq \frac{2\pi}{3} + 4\pi k \leq 7\pi; \quad \frac{5}{6} \leq k \leq \frac{19}{12}; \quad k = 1; \quad x = \frac{14\pi}{3};$$

$$4\pi \leq -\frac{2\pi}{3} + 4\pi k \leq 7\pi; \quad \frac{7}{6} \leq k \leq \frac{23}{12}; \text{ таких значений } k \in \mathbb{Z} \text{ не существует.}$$

Получим числа  $6\pi; \frac{14\pi}{3}$ .

**Ответ:** а)  $2\pi + 4\pi n, \pm \frac{2\pi}{3} + 4\pi k$ , где  $n, k \in \mathbb{Z}$ ; б)  $6\pi; \frac{14\pi}{3}$ .

14

**Решение**

а) Пусть прямая  $BD$  пересекает плоскость  $\alpha$  в точке  $H$  (рис. 1), а  $SO$  — высота пирамиды  $SABCD$ . Поскольку пирамида  $SABCD$  правильная, центр квадрата  $ABCD$  совпадает с точкой  $O$ . Значит, прямая  $SO$  лежит в плоскости  $SBD$  (рис. 2). Следовательно, плоскость  $SBD$  перпендикулярна плоскости  $ABC$ .

Получаем, что прямая  $KH$ , являющаяся прямой пересечения плоскостей  $SBD$  и  $\alpha$ , перпендикулярна плоскости  $ABC$  и параллельна прямой  $SO$ . В треугольнике  $SOB$  имеем

$$BH = \frac{KB}{SB} \cdot OB = \frac{KB}{SB} \cdot \frac{BD}{2} = \frac{7}{19} BD.$$

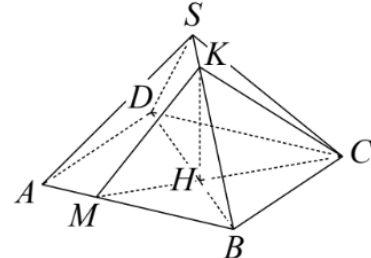


Рис. 1

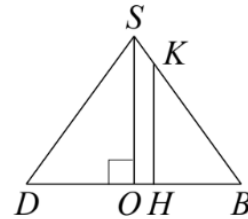


Рис. 2

Рассмотрим квадрат  $ABCD$  (рис. 3). Пусть прямые  $BD$  и  $CM$  пересекаются в точке  $H_1$ . Треугольники  $MH_1B$  и  $CH_1D$  подобны по двум углам. Получаем

$$BH_1 = \frac{BM}{CD} \cdot DH_1 = \frac{7}{12} DH_1; BH_1 = \frac{7}{19} BD.$$

Таким образом, прямая  $CM$  делит отрезок  $BD$  в таком же отношении, что и плоскость  $\alpha$ , значит, плоскость  $\alpha$  содержит точку  $C$ .

б) Из доказанного в пункте а) следует, что искомое сечение — треугольник  $СКМ$ .

В треугольнике  $SOB$  имеем

$$OB = \frac{BD}{2} = \frac{AB\sqrt{2}}{2} = 6\sqrt{2}; SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{361 - 72} = 17;$$

$$KH = \frac{KB}{SB} \cdot SO = \frac{14}{19} \cdot 17 = \frac{238}{19}.$$

В прямоугольном треугольнике  $BCM$  имеем

$$CM = \sqrt{BM^2 + BC^2} = \sqrt{193}.$$

Отрезок  $KH$  перпендикулярен плоскости  $ABC$ , а значит, и прямой  $CM$ .

Следовательно, он является высотой треугольника  $СКМ$ . Площадь треугольника  $СКМ$  равна

$$\frac{CM \cdot KH}{2} = \frac{119\sqrt{193}}{19}.$$

**Ответ:** б)  $\frac{119\sqrt{193}}{19}$ .

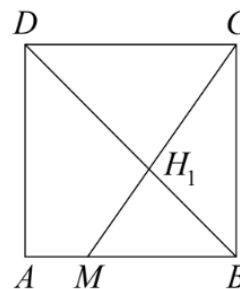


Рис. 3

15

**Решение.**

Преобразуем неравенство:

$$\frac{(7-2x)^2}{x+2} - \frac{(7-2x)^2}{(x-3)(x-6)} \leq 0; \quad \frac{(7-2x)^2(x^2-9x+18-x-2)}{(x+2)(x-3)(x-6)} \leq 0,$$

$$\text{следовательно, } \frac{(7-2x)^2(x-2)(x-8)}{(x+2)(x-3)(x-6)} \leq 0.$$

Получаем:  $x < -2$ ;  $2 \leq x < 3$ ;  $x = 3, 5$ ;  $6 < x \leq 8$ .

**Ответ:**  $(-\infty; -2)$ ;  $[2; 3)$ ;  $\{3, 5\}$ ;  $(6; 8]$ .

16

**Решение.**

Пусть кредит планируется взять на  $n$  лет. Долг перед банком (в млн рублей) по состоянию на июль должен уменьшаться до нуля равномерно:

$$4, \frac{4(n-1)}{n}, \dots, \frac{4 \cdot 2}{n}, \frac{4}{n}, 0.$$

По условию, каждый январь долг будет возрастать на 15 %. Найдём значения долга (в млн рублей) на конец каждого января:

$$4,6, \frac{4,6(n-1)}{n}, \dots, \frac{4,6 \cdot 2}{n}, \frac{4,6}{n}.$$

Значит, платежи (в млн рублей) должны быть следующими:

$$0,6 + \frac{4}{n}, \frac{0,6(n-1) + 4}{n}, \dots, \frac{0,6 \cdot 2 + 4}{n}, \frac{0,6 + 4}{n}.$$

Получаем  $\frac{4,6}{n} = 0,575$ , откуда находим  $n = 8$ . Сумма всех платежей будет равна

$$4 + 0,6 \left( 1 + \frac{7}{8} + \dots + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} \right) = 4 + 0,6 \cdot \frac{9}{2} = 6,7 \text{ (млн рублей)}.$$

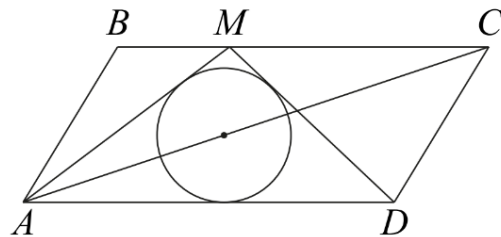
**Ответ:** 6,7 млн рублей.

17

**Решение.**

а) Треугольник  $AMC$  равнобедренный, следовательно,  $\angle MAC = \angle MCA$ .

Прямые  $AD$  и  $BC$  параллельны, следовательно, накрест лежащие углы  $BCA$  и  $CAD$  при секущей  $AC$  равны.



Получаем, что  $\angle MAC = \angle MCA = \angle CAD$ , а значит, луч  $AC$  является биссектрисой угла  $MAD$ , на которой лежит центр вписанной в треугольник  $AMD$  окружности.

б) Обозначим  $AM = MC$  через  $x$ , тогда  $BM = 20 - x$ . По теореме косинусов в треугольнике  $ABM$  имеем

$$AM^2 = AB^2 + BM^2 - 2AB \cdot BM \cdot \cos 120^\circ; x^2 = 100 + (20 - x)^2 + 10(20 - x),$$

откуда следует, что  $x = 14$ .

По теореме косинусов в треугольнике  $CMD$ , в котором  $\angle MCD = 60^\circ$ ,

$$MD = \sqrt{MC^2 + CD^2 - MC \cdot CD} = 2\sqrt{39}.$$

Треугольник  $AMD$  и параллелограмм  $ABCD$  имеют общую высоту, равную расстоянию между прямыми  $AD$  и  $BC$ , и общую сторону  $AD$ , перпендикулярную этой высоте. Значит, площадь треугольника  $AMD$  равна половине площади параллелограмма  $ABCD$ :

$$S_{AMD} = \frac{AB \cdot AD \cdot \sin \angle BAD}{2} = 50\sqrt{3}.$$

С другой стороны, площадь треугольника  $AMD$  равна половине произведения его периметра на радиус вписанной окружности. Отсюда найдём радиус  $r$  вписанной в треугольник  $AMD$  окружности:

$$r = \frac{2S_{AMD}}{AM + MD + AD} = \frac{100\sqrt{3}}{14 + 2\sqrt{39} + 20} = \frac{50\sqrt{3}}{17 + \sqrt{39}} = \frac{17\sqrt{3} - 3\sqrt{13}}{5}.$$

Ответ: б)  $\frac{17\sqrt{3} - 3\sqrt{13}}{5}$ .

18

### Решение.

Пусть  $t = |x + 4| + |x - a|$ , тогда уравнение запишется в виде  $t^2 - 5t + 3a(5 - 3a) = 0$ . Решения этого уравнения имеют вид  $t = 3a$  или  $t = 5 - 3a$ . Значит, решения исходного уравнения — это решения уравнений  $|x + 4| + |x - a| = 3a$  или  $|x + 4| + |x - a| = 5 - 3a$ .

Исследуем, сколько решений имеет уравнение  $|x + 4| + |x - a| = b$  в зависимости от  $a$  и  $b$ . Рассмотрим функцию  $f(x) = |x + 4| + |x - a|$ . При  $a \neq -4$  графиком этой функции является ломаная, состоящая из трёх звеньев, угловые коэффициенты которых равны  $-2$ ,  $0$  и  $2$ . Минимальное значение достигается на отрезке с концами  $-4$  и  $a$  и равно  $|a + 4|$ . Таким образом,

уравнение  $|x + 4| + |x - a| = b$  имеет два решения при  $b > |a + 4|$ , бесконечно много решений при  $b = |a + 4|$  и не имеет решений при  $b < |a + 4|$ .

В случае  $a = -4$  уравнение  $2|x + 4| = b$  имеет два решения при  $b > 0$ , одно решение при  $b = 0$  и не имеет решений при  $b < 0$ .

Уравнения  $|x + 4| + |x - a| = 3a$  и  $|x + 4| + |x - a| = 5 - 3a$  могут иметь общие решения при  $3a = 5 - 3a$ , то есть при  $a = \frac{5}{6}$ . При  $a = \frac{5}{6}$  оба уравнения

принимают вид  $|x + 4| + \left|x - \frac{5}{6}\right| = 2,5$  и не имеют решений.

При других значениях  $a$  исходное уравнение имеет ровно два решения, если одно из уравнений  $|x+4|+|x-a|=3a$  и  $|x+4|+|x-a|=5-3a$  не имеет решений, а другое имеет два решения. Эти условия равносильны неравенству  $(3a-|a+4|)(5-3a-|a+4|)<0$ . При  $a\leq-4$  неравенство принимает вид  $(4a+4)(9-2a)<0$  и выполняется при любом  $a\leq-4$ . При  $a>-4$  неравенство принимает вид  $(2a-4)(1-4a)<0$ , откуда с учётом условия  $a>-4$  получаем  $-4<a<\frac{1}{4}$ ;  $a>2$ .

Таким образом, исходное уравнение имеет ровно два решения при  $a<\frac{1}{4}$  и  $a>2$ .

**Ответ:**  $a<\frac{1}{4}$ ;  $a>2$ .

19

**Решение.**

а) Да, может:  $1149+1491=2640$ . Покажем, как найти этот пример. Пусть  $\overline{abcd}$  — исходное число (черта сверху показывает, что это не произведение, а десятичная запись числа цифрами).

Первая цифра суммы  $\overline{abcd}+\overline{bcda}$  равна 2, поэтому  $a=b=1$ . Последняя цифра суммы равна 0, значит,  $d=9$ . Тогда  $c=4$ .

б) Нет, не может. Пусть  $\overline{abcde}$  — исходное число. Тогда

$$\begin{aligned}\overline{abcde}+\overline{bcdea}&=10001a+11000b+1100c+110d+11e=\\&=11\cdot(909a+1000b+100c+10d+e)+2a.\end{aligned}$$

Это число не делится на 11, поэтому оно не может равняться 25 795.

в) Пусть  $\overline{525abc}$  — исходное число. Тогда

$$\overline{525abc}+\overline{25abc5}=775\,005+1100a+110b+11c=11(70\,455+\overline{abc}).$$

Это число делится на 33, только если трёхзначное число  $70\,455+\overline{abc}$  делится на 3, а значит, число  $\overline{abc}$  делится на 3.

Цифру  $a$  можно выбрать произвольно из множества цифр от 1 до 7, цифру  $b$  — произвольно из множества от 1 до 9. При этом  $c=3-r$ ,  $c=6-r$  или  $c=9-r$ , где  $r$  — остаток от деления числа  $a+b$  на 3. Таким образом, всего существует  $7\cdot 9\cdot 3=189$  чисел.

**Ответ:** а) да, б) нет, в) 189.